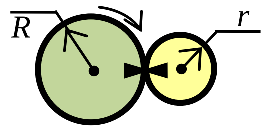
## ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «РобоФест» по ФИЗИКЕ
## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ (ФИНАЛЬНЫЙ) ЭТАП 2016 года, ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР
## БИЛЕТ № 01 (10-11 классы)

**Задание 1:**

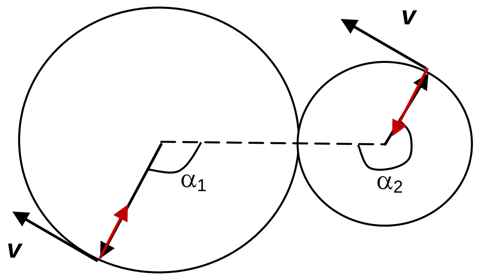
**Вопрос**: Точка движется по окружности радиуса $R$. Как связаны между собой ее угловая скорость, линейная скорость и ускорение?

**Задача:** В некотором механизме ведущая шестеренка радиуса $R$ вращается с угловой скоростью $\Omega$. Эта шестеренка приводит в движение шестеренку меньшего радиуса, равного $r$. Шестеренки вращаются без проскальзывания. На ободе каждой шестеренки поставлена метка. В момент времени $t = 0$ эти метки соприкоснулись. Через какое время относительная скорость этих меток в первый раз станет равной нулю? Чему в этот момент будет равняться их относительное ускорение?




<u>Ответ на вопрос</u>: Если угловая скорость точки равна $\omega$, то ее линейная скорость $V = \omega R$, причем вектор скорости всегда направлен по касательной к окружности, а вектор ускорения направлен к центру окружности. Величина такого «центростремительного» ускорения $a = \omega^2 R = \dfrac{V^2}{R}$ .

<u>Решение задачи</u>: Поскольку шестеренки крутятся без проскальзывания, то их линейные скорости одинаковы. Поэтому относительная скорость меток станет равной нулю, когда они будут двигаться в одном направлении. Как видно из построения, это случится впервые в тот момент, когда сумма углов поворота меток от начального положения станет равна 360º, или $2\pi$ рад. Учитывая связь линейных и угловых скоростей, найдем, что $\omega r = \Omega R \Rightarrow \omega = \dfrac{R}{r}\Omega$. Итак, $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi$, если



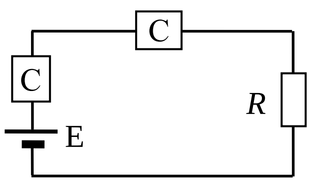

$(\omega + \Omega)t = 2\pi \Rightarrow t = \dfrac{2\pi}{\omega + \Omega} = \dfrac{r}{R+r}\dfrac{2\pi}{\Omega}$. Ускорения меток направлены по радиусам, то есть в противоположных направлениях, поэтому относительное ускорение равно сумме величин центростремительных ускорений: $a_{12} = \Omega^2 R + \omega^2 r = \Omega^2 \dfrac{R(R+r)}{r}$.

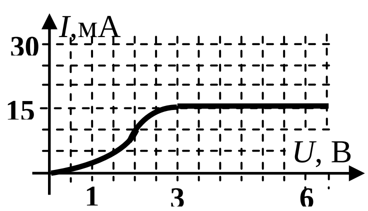
Ответ: $t = \dfrac{r}{R+r}\dfrac{\pi}{\Omega}$, $a_{12} = \Omega^2 \dfrac{R(R+r)}{r}$.

**Задание 2:**

**Вопрос**: Вольтамперная характеристика элемента электрической цепи – это зависимость протекающего через него тока от приложенного напряжения. У обычного резистора это зависимость $I = \dfrac{U}{R}$, и ее график – прямая линия. У некоторых элементов эта зависимость имеет более сложный вид, и соответствующие графики криволинейны. Предположим, у Вас есть два таких элемента. Предложите алгоритм, с помощью которого по графикам вольтамперных характеристик двух элементов можно построить график вольтамперной характеристики их последовательного соединения.

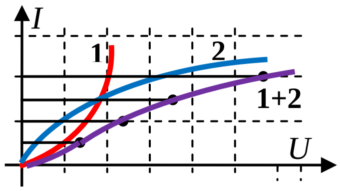
**Задача**: Электронная управляющая схема должна потреблять ток $I = (9{,}5 \pm 1{,}5)$ мА. Входное сопротивление схемы равно $R = 195$ Ом. У нас есть аккумулятор с ЭДС $\mathrm{E} = 6$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом и стабилизаторы тока (С) – элементы, вольтамперная характеристика которых показана на правом рисунке. Каким



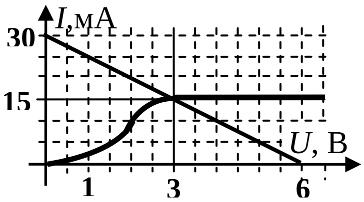



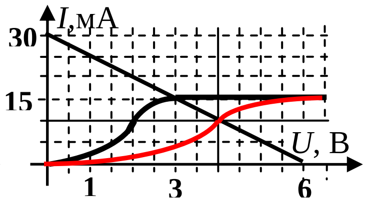
будет ток, потребляемый схемой, если подключить ее к аккумулятору последовательно с одним стабилизатором? Исправится ли ситуация, если использовать два стабилизатора по схеме, показанной на левом рисунке?

Ответ на вопрос: При последовательном соединении двух элементов в них течет одинаковый («общий») ток, а общее напряжение есть сумма напряжений на элементах. Поэтому алгоритм построения вольт-амперной характеристики последовательного соединения двух нелинейных элементов может быть следующим: при каждом значении общего тока находим точку, отвечающую общему напряжению – путем суммирования напряжений для этого тока на каждом элементе.




Решение задачи: При подключении к аккумулятору одного стабилизатора последовательно со схемой ток в цепи должен удовлетворять двум уравнениям. Во-первых, он связан с напряжением на стабилизаторе уравнением его вольт-амперной характеристики $I = f(U)$. Во-вторых, напряжение на стабилизаторе совпадает с напряжением на аккумуляторе и схеме, и по закону Ома для участка цепи с ЭДС $U = \mathrm{E} - I(R+r) \Rightarrow I = \dfrac{\mathrm{E}-U}{R+r}$. Эту систему из двух уравнений для двух неизвестных ($I$ и $U$) можно решить графически. Для этого на графике, на котором построена кривая $I = f(U)$, нужно построить прямую $I = \dfrac{\mathrm{E}-U}{R+r}$. Точка их пересечения и определяет значение неизвестных. Как видно из левого графика, ток в цепи с одним стабилизатором $I_1 \approx 15$ мА, что не подходит для схемы. Для анализа ситуации в случае с двумя стабилизаторами нужно поступить так же, только нужно искать точку пересечения прямой $I = \dfrac{\mathrm{E}-U}{R+r}$ с вольт-амперной характеристикой последовательного соединения двух стабилизаторов, которая строится по алгоритму, разработанному в процессе ответа на вопрос (она построена на правом графике). Из правого графика находим, что в этом случае ток через схему $I_2 \approx 10$ мА, то есть ситуация действительно «исправится». Впрочем, можно отметить, что точка пересечения лежит на участке «крутого склона» вольт-амперной характеристики пары стабилизаторов, что не очень хорошо: небольшие колебания ЭДС аккумулятора приведут к довольно заметным колебаниям тока в цепи.



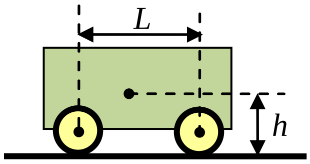




Ответ: исправится: с одним стабилизатором ток потребления схемы $I_1 \approx 15$ мА, с двумя – $I_2 \approx 10$ мА.

**Задание 3:**

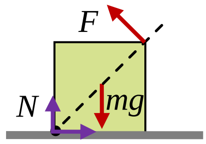
**Вопрос**: Однородный кубик массы $m$ лежит на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между кубиком и поверхностью $\mu \approx 1$. Как нужно действовать, чтобы заставить кубик оторваться от поверхности, вращаясь вокруг одного из своих ребер, используя минимальную по величине силу? Чему равна эта минимальная величина силы? Ответ объяснить.

**Задача:** Центр масс управляемой тележки расположен точно посередине между осями двух пар ее колес (расстояние между которыми равно $L = 30$ см) на высоте $h = 15$ см (см. рисунок). Одна из пар колес является ведущей, и двигатель может вращать ее одинаково в любую сторону. Если тележку пустить вверх по наклонной плоскости так, что ведущая пара колес оказывается сзади, то тележка сможет ехать вверх с постоянной скоростью, если угол наклона плоскости не превышает $\alpha_1 = 30°$ - иначе ведущие колеса начинают проскальзывать. Чему равен коэффициент трения ее колес о плоскость? Каким будет максимальный угол наклона плоскости, на которой тележка сможет ехать вверх с постоянной скоростью, если пустить ее так, что ведущие колеса будут спереди?



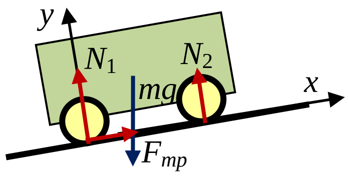
Каким станет максимальный возможный угол подъема, если заменить покрышки колес другими, имеющими ту же массу, но с коэффициентом трения о поверхность $\mu > 1$? Трением качения для пары колес, не являющихся ведущими, пренебречь.

Ответ на вопрос: Для начала «переворота» кубика необходимо, чтобы момент действующей на него силы ( $\vec{F}$ ) относительного ребра, являющегося осью вращения, был больше момента силы тяжести (в момент начала вращения кубик опирается на поверхность именно этим ребром, и момент сил нормальной реакции и трения относительно этого ребра равен нулю) При заданном моменте сила будет минимальна, если ее плечо максимально. Как нетрудно догадаться, «переворачивающая» сила будет иметь максимальное плечо, если приложить ее к противоположному ребру, направив перпендикулярно диагонали вертикального квадратного сечения (см. рисунок).




Если $a$ – длина ребра кубика, то условием начала «переворота» является $F \cdot a\sqrt{2} > mg\dfrac{a}{2} \Rightarrow F > \dfrac{mg}{2\sqrt{2}}$. Кроме того, чтобы кубик не начал скользить по поверхности до начала переворота, должно быть выполнено требование $F\dfrac{1}{\sqrt{2}} \le \mu\left(mg - F\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow F \le \dfrac{mg}{\sqrt{2}}$. Оба этих условия могут быть выполнены одновременно, так что описанное в вопросе вращение возможно. Минимальная величина силы, которая необходима для его начала, должна быть чуть больше $F_c = \dfrac{mg}{2\sqrt{2}}$.

Решение задачи: Рассмотрим сначала случай, когда тележка въезжает на склон с «нижними» ведущими колесами. Если тележка едет вверх с постоянной скоростью, сумма всех проекций приложенных к ней сил и сумма моментов сил равны нулю. На нее действуют: сила тяжести, сила нормальной реакции двух пар колес, сила трения ведущей пары колес. Следовательно, должны выполняться соотношения (используем систему координат, показанную на рисунке):




$\sum F_x = 0 \Rightarrow F_{mp} = mg\sin(\alpha)$, $\sum F_y = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 = mg\cos(\alpha)$ и правило моментов относительно оси, проходящей через точки опоры ведущих колес: $+N_2L - mg\left(\dfrac{L}{2}\cos(\alpha) - h\sin(\alpha)\right) = 0 \Rightarrow N_2 = \dfrac{mg}{2}\left(\cos(\alpha) - \dfrac{2h}{L}\sin(\alpha)\right)$. С учетом второго уравнения найдем, что $N_1 = \dfrac{mg}{2}\left(\cos(\alpha) + \dfrac{2h}{L}\sin(\alpha)\right)$. Как видно, нижние колеса нагружены больше верхних. Начало проскальзывания ведущих колес соответствует $F_{mp} = \mu N_1$, поэтому

$$mg\sin(\alpha_1) = \mu\frac{mg}{2}\left(\cos(\alpha_1) + \frac{2h}{L}\sin(\alpha_1)\right) \Rightarrow \mu = \frac{2L\sin(\alpha_1)}{L\cos(\alpha_1) + 2h\sin(\alpha_1)} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3} - 1 \approx 0{,}73.$$

Если ведущие колеса будут спереди, то распределение сил нормальной реакции останется таким же, но условие отсутствия проскальзывания $F_{mp} \le \mu N_2$ выполняется при

$$mg\sin(\alpha) \le \mu\frac{mg}{2}\left(\cos(\alpha) - \frac{2h}{L}\sin(\alpha)\right) \Rightarrow tg(\alpha) \le \frac{\mu L}{2(L + \mu h)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}.$$

Значит, теперь максимальный угол наклона, на который тележка сможет въехать без проскальзывания, уменьшится: $\alpha_2 = arctg\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) = 15°$. Если заменить покрышки на другие, с лучшим сцеплением, то максимальный угол движения без проскальзывания может быть достигнут, естественно, при подъеме первым способом (ведущие колеса внизу), при котором должно быть

$$mg\sin(\alpha)\le\mu\frac{mg}{2}\left(\cos(\alpha)+\frac{2h}{L}\sin(\alpha)\right)\Rightarrow tg(\alpha)\le\frac{\mu L}{2(L-\mu h)}\Big|_{\mu=1}=1\Rightarrow\alpha\le 45^\circ.$$

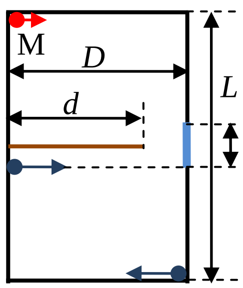
Значит, при $\mu>1$ угол, при котором начнется проскальзывание, больше 45°. Однако в этом случае нужно также проверить, что тележка не будет опрокидываться, то есть что $N_2\ge 0$ (передние колеса не отрываются от поверхности). Как видно из формулы для $N_2$, это выполняется при $\cos(\alpha)-\frac{2h}{L}\sin(\alpha)\ge 0\Rightarrow tg(\alpha)\le\frac{L}{2h}=1\Rightarrow\alpha\le 45^\circ$, независимо от коэффициента трения.

Ответ: $\mu=\frac{2L\sin(\alpha_1)}{L\cos(\alpha_1)+2h\sin(\alpha_1)}=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1\approx 0{,}73$, при движении ведущими колесами вперед тележка может въехать на склон с углом наклона не более $\alpha_2=arctg\left(\frac{\mu L}{2(L+\mu h)}\right)=arctg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)=15^\circ$, при замене покрышек на имеющие коэффициент трения $\mu>1$ максимальный угол наклона возрастает до $\alpha_3=arctg\left(\frac{L}{2h}\right)=45^\circ$.

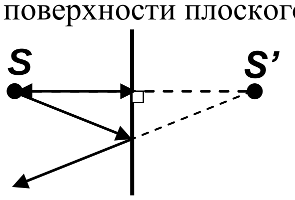
**Задание 4:**

**Вопрос**: Как построить изображение светящейся точки в плоском зеркале?

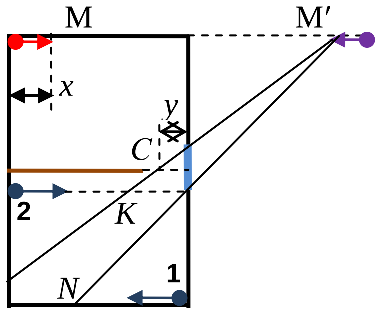
**Задача**: Робот «Мотылек» (М) ищет вокруг себя светящиеся объекты и едет к первому из тех, которые «увидел». Если он «увидит» одновременно два или более светящихся объекта, он выбирает себе цель случайным образом. М находится в углу зала размером $D\times L=8\times 12$ м. Посередине зал разгорожен непрозрачной ширмой шириной $d=6$ м, а точно напротив ширмы на стене висит зеркало шириной $l=2$ м (см. схему). Две лампочки на платформах располагаются за ширмой от М: одна – в противоположном углу, другая – у стенки напротив края зеркала. В некоторый момент времени М начинает двигаться вдоль стены с постоянной скоростью $v=0{,}4$ м/с, а обе лампочки – вдоль параллельных прямых с одинаковыми скоростями $u=2{,}5$ м/с. Можно ли определить, какую из лампочек М начнет преследовать?




Ответ на вопрос: Лучи, идущие от светящейся точки, отражаются от поверхности плоского зеркала таким образом, что в плоскости хода лучей угол падения равен углу отражения. Как видно из построения, продолжения отраженных лучей пересекаются в точке, лежащей за зеркалом на перпендикуляре к его плоскости на расстоянии, равном расстоянию от источника света. Таким образом, мнимое изображение точечного источника располагается симметрично источнику относительно плоскости зеркала.




Решение задачи: Для того, чтобы лучи света от лампочки попали на фотоэлементы «Мотылька» после отражения от зеркала, они до отражения должны идти в точку М′, симметричную М относительно зеркала. Пусть М сместился от начального положения на расстояние $x$ м. Тогда М′ сместилась на это же расстояние в противоположную сторону, поэтому область, которую «видит» М через зеркало, находится между прямыми, проведенными из М′ через края зеркала (см. рисунок). Нам нужно определить время, за которое каждая из лампочек попадет в эту область. Для лампочки №1: поскольку М′ движется со скоростью $v$, то край области «видимости» - точка N движется навстречу 1 со скоростью $v_1=\frac{L-l}{L+l}v=\frac{2}{7}$ м/с. Начальное расстояние между N и 1 равно $s_1=\frac{L-l}{L+l}D=\frac{40}{7}$ м, поэтому момент времени, в



который М увидит лампочку №1 соответствует $t_1 = \frac{s_1}{v_1 + u} = \frac{80}{39}$ с. Для лампочки № 2 область видимости может быть ограничена по двум причинам: световой луч от лампочки должен отражаться от зеркала и по дороге к зеркалу не должен пересекать ширму. Пусть точка К – пересечение прямой из М′, проходящей через край зеркала, и линии движения 2. Эта точка удаляется от 2 со скоростью $v_2 = \frac{2l}{L-l} v = \frac{4}{25}$ м/с, а начальное расстояние между ними $s_2 = D - \frac{2l}{L-l} D = \frac{L-3l}{L-l} D = \frac{24}{5}$ м, поэтому 2 «догонит» К за время $t_2 = \frac{s_2}{u - v_2} = \frac{80}{39}$ с, и это время в точности равняется $t_1$! При этом точка С – точка пересечения луча КМ′ с плоскостью ширмы находится от стены на расстоянии $y = \frac{l}{L-l}(D - vt_2) = \frac{56}{39}$ м < 2 м, то есть в этот момент ширма не мешает М «видеть» лампочку №2 в зеркале. Итак, мы обнаружили, что М «увидит» обе лампочки одновременно, и поэтому он выберет цель случайным образом. Значит, невозможно определить, какую из лампочек М начнет преследовать.

Примечание: в вычислениях скоростей и расстояний использовались свойства подобных треугольников.

Ответ: определить, какую из лампочек М начнет преследовать, невозможно, так как обе лампочки он «увидит» одновременно, спустя время $t_1 = t_2 = \frac{80}{39}$ с после начала движения.